Auktionen und Märkte, WS 14/15
Dr. Frank Rosar
rosar@uni-bonn.de
Sprechstunde: Donnerstag 11:15 - 12:15 n.V.

Übungsblatt 6: Erlösmaximierender Mechanismus

Aufgabe 1: Optimaler Mechanismus. Betrachten Sie das SIPV-Modell mit n Bietern und gleichverteilten Wertschätzungen $\widetilde{v}_i \sim U[0,1]$. Der Verkäufer ist risikoneutral und seine Wertschätzung sei v_0.

a) Geben Sie für den Fall, in dem die Wertschätzung des Verkäufers $v_0 = 0$ ist, den Mechanismus an, der den erwarteten Nutzen des Verkäufers maximiert.

b) Bieter mit welcher Wertschätzung haben in diesem Mechanismus einen erwarteten Profit von Null?

c) Welche Auktionsformate kennen Sie, die den erwarteten Nutzen des Verkäufers maximieren.

d) Betrachten Sie nun den Fall $v_0 > 0$. Wie muss der optimale Mechanismus modifiziert werden? Welche Auktionsformate maximieren den erwarteten Nutzen des Verkäufers?

e) Nehmen Sie nun an, dass der Verkäufer gezwungen ist das Objekt in jedem Fall zu verkaufen. Welche Auktionsformate maximieren nun den erwarteten Nutzen des Verkäufers?

Aufgabe 2: Take–it–or–leave–it Angebot. Angenommen ein Käufer habe die Wertschätzung v_B für ein Objekt. Dem Verkäufer ist nur bekannt, dass $\widetilde{v}_B$ auf dem Interval $[0,1]$ mit der Verteilungsfunktion $F(v)$ und Dichtefunktion $f(v)$ verteilt ist. Nehmen Sie an, dass für diese Verteilung die Funktion $J(v) = v - \frac{1-F(v)}{f(v)}$ strikt steigend und stetig ist. Die Wertschätzung des Verkäufers sei $v_S \in [0,1]$. Der Verkäufer macht ein Take-it-or-leave-it Angebot, d.h. er nennt dem Käufer einen Verkaufspreis p. Der Käufer hat nur die Möglichkeit diesen anzunehmen oder abzulehnen. Wir nehmen an, dass der Verkäufer nicht mehr bereit ist mit dem Käufer zu verhandeln wenn dieser den Preis p ablehnt. (Der Käufer kann also nicht damit rechnen, dass nach Ablehnung ein weiteres, niedrigeres Preisangebot folgt.)

a) Wie sollte der Verkäufer den Preis wählen, wenn er seinen Erlös maximieren will?

b) Diskutieren sie anhand der Bedingung erster Ordnung aus a), wie sich eine Senkung des Preises um Δ auswirkt.

c) Diskutieren sie anhand der Bedingung erster Ordnung aus a), wie sich eine Senkung des Preises auswirkt, bei der die Wahrscheinlichkeit eines Verkaufs um Δ_w steigt.

d) Wie sollte der Verkäufer den Preis wählen, wenn er seinen Nutzen maximieren will?

e) Führt Nutzenmaximierung zu einem effizienten Reservationspreis?

Aufgabe 3: Sequentiell eintreffende Bieter. Betrachten Sie das SIPV-Modell mit 3 Bietern und gleichverteilten Wertschätzungen $\widetilde{v}_i \sim U[0,1]$. Die drei Bieter treffen nacheinander auf den Verkäufer. Der Verkäufer macht zunächst dem ersten Bieter ein Take–it–or–leave–it Angebot p_1. Wenn der erste Bieter das Angebot annimmt, verkauft ihm der Verkäufer das Objekt zum angebotenen Preis p_1. Wenn der Bieter ablehnt, hat er später keine Möglichkeit mehr das Objekt zu kaufen. Stattdessen macht der Verkäufer dem zweiten Käufer ein Take–it–or–leave–it Angebot p_2 usw.

a) Bestimmen Sie die optimalen Angebote p_1^*, p_2^*, p_3^*. Nehmen Sie dabei an, dass der Verkäufer eine Wertschätzung von Null für das Objekt hat.

b) Zeigen Sie, dass die Preise über die Zeit fallen. Argumentieren Sie, dass dies auch bei einer anderen Verteilung als der Gleichverteilung der Fall wäre.

c) Wir hatten angenommen, dass die Käufer nacheinander auf den Verkäufer treffen. Das heißt es gibt keinen Zeitpunkt zu dem mehr als ein Käufer gleichzeitig an einem Mechanismus teilnehmen kann. Zeigen Sie, dass unter dieser Annahme eine Folge von Take–it–or–leave–it Angebote den Erlös des Verkäufers unter allen anreizkompatiblen und individuell rationalen Mechanismen maximiert.

Aufgabe 4: Erlösmaximierung mit asymmetrischen Bietern. Ein Verkäufer verkauft ein Objekt und möchte seinen Erlös maximieren. Es gebe zwei Käufer mit unabhängig verteilten Wertschätzungen, die dem Verkäufer nicht bekannt sind. Der Verkäufer kennt jedoch die Verteilungen der Wertschätzungen. Die Wertschätzung des ersten Käufers sei gleichverteilt mit $\widetilde{v}_1 \sim U[1,2]$, die Wertschätzung des zweiten Käufers sei gleichverteilt mit $\widetilde{v}_2 \sim U[0,1]$.

a) Betrachten Sie die Zweitpreisauktion mit Reservationspreis. Bestimmen Sie den optimalen Reservationspreis.

b) Betrachten Sie nun die Situation, dass der Verkäufer zuerst ein Take–it–or–leave–it Angebot (TIOLI Angebot) an Bieter eins macht und falls dieser ablehnt ein TIOLI Angebot an Bieter zwei macht. Bestimmen sie die optimalen Preise p_1 und p_2.

c) Geben Sie die Allokationsregel im optimalen direkten Mechanismus an. Vergleichen Sie diese Allokationsregel graphisch mit der Allokationsregel aus (b).

Betrachten sie nun folgende Modifikation der Zweitpreisauktion. Bieter zwei, also der schwächere Bieter, erhält einen Bonus in Höhe von k. Mit einem Gebot b_2 gewinnt er die Auktion wenn $b_2 + k > b_1$. Im Falle eines Gewinns muss er $b_1 - k$ bezahlen. (Bemerkung: Dieser Preis entspricht dem niedrigsten Gebot mit dem er gegen b_1 gewinnen würde.) Umgekehrt gewinnt der erste Bieter wenn $b_1 > b_2 + k$ und bezahlt im Falle eines Gewinns $b_2 + k$.

d) Überzeugen Sie sich, dass es für beide Bieter eine dominante Strategie ist, ihre wahre Wertschätzung zu bieten.

e) Bestimmen Sie k so, dass der erwartete Erlös maximiert wird und vergleichen sie den dadurch erzielten erwarteten Erlös mit dem erwarteten Erlös aus dem optimalen direkten Mechanismus. Es bietet sich an, sich den Effekt des Bonus auf die implementierte Allokationsperformance graphisch klar zu machen.

f) Diskutieren Sie anhand eines Diagramms folgende Aussagen:

   - Die Ergebnisse aus dieser Übungsaufgabe lassen sich nicht auf andere Verteilungen übertragen.
   - (schwieriger) Auch für die Gleichverteilung ist es nicht möglich, die optimale Allokation durch die Erstpreisauktion mit einem Bonus für Bieter zwei zu implementieren.