Auktionen und Märkte, WS 12/13 — 1. Klausurtermin
Dr. Frank Rosar — 29. Januar 2013

# Klausur zur Vorlesung Auktionen und Märkte

**Erlaubte Hilfsmittel: Keine**

**Aufgabe 1 (40 Punkte)**

Es gibt zwei Spieler ($i = 1, 2$) und zwei mögliche Entscheidungen ($k = 1, 2$). Jeder Spieler hat ein Signal $\theta_i$ als private Information. $\theta_1$ und $\theta_2$ sind unabhängig voneinander auf dem Intervall $[0, 1]$ gleichverteilt. Spieler $i$'s Nutzen aus der Entscheidung ist

$$v_i(k, \theta_i) = \begin{cases} \theta_i & \text{wenn } k = i \\ 0 & \text{wenn } k \neq i \end{cases} .$$

Spieler $i$'s Profit ist $v_i(k, \theta_i) + t_i$. Dabei beschreibt $t_i$ einen monetären Transfer, den Spieler $i$ erhält.

a) Geben Sie an, welche Entscheidung effizient ist.

b) Geben Sie die Zahlungsregel von Spieler 1 im allgemeinen VCG–Mechanismus an.

c) Geben Sie die Zahlungsregel von Spieler 1 im Pivot–Mechanismus an.

Obiges Setting kann so interpretiert werden, dass die beiden Spieler zusammen ein unteilbares Objekt gewonnen haben. Es muss also bestimmt werden, wer der beiden das Objekt erhält und wie dieser den anderen kompensiert. Betrachten Sie nun den folgenden (indirekten) Mechanismus dazu:

Spieler 1 nennt zunächst einen Preis $p \in [0, 1]$. Anschließend entscheidet Spieler 2 zwischen zwei Optionen:

**Option "kaufen":** Spieler 2 erhält das Objekt selbst und bezahlt den Preis $p$ an Spieler 1.

**Option "verkaufen":** Spieler 2 erhält eine Zahlung in Höhe von $p$ von Spieler 1, Spieler 1 erhält dafür das Objekt.

D.h., wählt Spieler 2 "kaufen", so gilt $k = 2$, $t_1 = p$ und $t_2 = -p$. Wählt Spieler 2 hingegen "verkaufen", so gilt $k = 1$, $t_1 = -p$ und $t_2 = p$.

d) Wie wird sich Spieler 2 verhalten, wenn Spieler 1 den Preis $p \in [0, 1]$ gewählt hat?

e) Berechnen Sie nun, welcher Preis $p$ den erwarteten Profit von Spieler 1 maximiert, wenn sich Spieler 2 wie in d) beschrieben verhält.

f) Zeichnen Sie die resultierende Allokationsperformance in ein $\theta_1$–$\theta_2$–Diagramm ein.

**Aufgabe 2 (60 Punkte)**

Es gelten die Annahmen des SIPV–Modells. Es gibt ein unteilbares Objekt und zwei potentielle Käufer. Die Wertschätzung $v_i$ von Käufer $i$ ist auf dem Intervall [0,1] gleichverteilt. Die Wertschätzungen der Käufer sind private Information, die Verteilung ist allgemein bekannt. Der Verkäufer hat eine allgmein bekannte Wertschätzung von $v_0 \in [0, 1)$. Betrachten Sie eine Erstpreisauktion mit Reservationspreis $r \in [0, 1]$.

a) Leiten Sie das symmetrische Gleichgewicht der Auktion her.

   Hinweis: Erklären Sie, welche Wertschätzungen Käufer haben, die an der Auktion teilnehmen, und leiten Sie her, wie teilnehmende Käufer bieten.

b) Geben Sie eine Formel für den erwarteten Erlös des Verkäufers an.

   Hinweis 1: Die abstrakte Formel genügt, Integrale müssen nicht ausgerechnet werden.

   Hinweis 2: Die Dichtefunktion der höchsten von zwei unabhängig auf $[0, 1]$ gleichverteilten Zufallsvariablen ist $f_{(1:2)}(v) = 2v$.

c) Welcher Reservationspreis maximiert den erwarteten Profit des Verkäufers?

   Hinweis: Argumentieren Sie entweder mit Hilfe von Resultaten aus dem Mechanisms Design–Teil der Vorlesung oder leiten Sie das Ergebnis mit Hilfe der Aufgabenteile a) und b) her.

Nehmen Sie nun an, es gibt einen dritten potentiellen Käufer, dessen Wertschätzung auch auf dem Intervall $[0, 1]$ gleichverteilt und statistisch unabhängig von den Wertschätzungen der anderen Käufer ist. Nehmen Sie weiter an, dass die Wertschätzung des Verkäufers nun 0 ist. Wie bisher führt der Verkäufer zuerst eine Erstpreisauktion mit Reservationspreis $r \in [0, 1]$ durch, an der nur Käufer 1 und Käufer 2 teilnehmen können. Sollte das Objekt nicht in der Auktion verkauft werden, dann macht der Verkäufer ein Take–it–or–leave–it–Angebot an Käufer 3 in Höhe von $p$. Lehnt dieser ab, behält der Verkäufer das Objekt.

d) Berechnen Sie das profitmaximierende Angebot $p$ des Verkäufers an Käufer 3, wenn das Objekt nicht in der Auktion verkauft wird.

e) Erklären Sie, welcher Reservationspreis nun den erwarteten Profit des Verkäufers maximiert.