Klausur zur Vorlesung Auktionen und Märkte

Erlaubte Hilfsmittel: Keine

Aufgabe 1 (70 Punkte)

Es gelten die Annahmen des SIPV–Modells. Es gibt ein unteilbares Objekt und $n \geq 2$ potentielle Käufer. Die Wertschätzung v_i von Käufer i ist auf dem Intervall $[0, 1]$ gleichverteilt.

Betrachten Sie zunächst eine All–Pay–Auktion, d.h., der Bieter mit dem höchsten Gebot erhält das Objekt, jeder Bieter bezahlt sein Gebot.

a) Leiten Sie das symmetrische Gleichgewicht der All–Pay–Auktion (ohne Reservationspreis und ohne Eintrittsgeld) her.

b) Berechnen Sie den erwarteten Erlös des Verkäufers.

Betrachten Sie nun den folgenden Festpreismechanismus: Der Verkäufer nennt zunächst einen Preis $p \in [0, 1]$. Anschließend entscheiden die n Käufer simultan, ob sie bereit sind zu diesem Preis zu kaufen oder nicht. Falls keiner dazu bereit ist, wird das Objekt nicht verkauft. Ist genau einer dazu bereit, erhält er das Objekt und bezahlt den Preis p. Ist mehr als ein Käufer bereit das Objekt zu kaufen, bestimmt eine faire Lotterie welcher dieser Käufer das Objekt erhält und den Preis p bezahlen muss.

c) Beschreiben Sie, wie eine schwach dominante Strategie der Käufer aussieht.

d) Geben Sie an, mit welcher Wahrscheinlichkeit das Objekt nicht verkauft wird.

e) Wie hoch ist der erwartete Erlös des Verkäufers, wenn er den Festpreis $p = 1/2$ wählt?

f) Berechnen Sie den Festpreis $p^*(n)$, der den erwarteten Erlös des Verkäufers maximiert.

Vergleichen Sie nun All–Pay–Auktion und Festpreismechanismus:

g) Berechnen Sie für $n = 2$, ob die oben betrachtete All–Pay–Auktion (ohne Reservationspreis und ohne Eintrittsgeld) oder der Festpreismechanismus mit $p = 1/2$ einen höheren erwarteten Erlös erzielt.

h) Argumentieren Sie, warum eine All–Pay–Auktion mit optimalem Reservationspreis für jedes $n \geq 2$ einen *strikt* höheren erwarteten Erlös erzielt als der Festpreismechanismus mit dem optimalen Festpreis.

[Hinweis: Der Aufgabenteil kann unabhängig von den anderen Aufgabenteilen gelöst werden. Sie dürfen Resultate aus der Vorlesung benutzen. In diesem Aufgabenteil soll *nicht* gerechnet werden.]

Aufgabe 2 (30 Punkte)

a) Erklären Sie, was das Revelationsprinzip besagt.

Es gelten im Folgenden die Annahmen des SIPV–Modells. Es gibt ein unteilbares Objekt und zwei potentielle Käufer. Die Wertschätzung v_i von Käufer i ist auf dem Intervall $[0,1]$ gleichverteilt.

Betrachten Sie den folgenden (indirekten) Mechanismus: Die Menge der Nachrichten, aus denen Käufer i wählen kann, ist $B_i = \{\text{ja}, \text{nein}\}$. Allokations– und Zahlungsregel sind wie folgt gegeben:

$$q_1^M(b_1, b_2) = \begin{cases} 1 & \text{falls } b_1 = \text{ja} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad t_1^M(b_1, b_2) = \begin{cases} 1/2 & \text{falls } q_1^M(b_1, b_2) = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$q_2^M(b_1, b_2) = \begin{cases} 1 & \text{falls } b_2 = \text{ja und } b_1 = \text{nein} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad t_2^M(b_1, b_2) = \begin{cases} 1/4 & \text{falls } q_2^M(b_1, b_2) = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Der Profit von Käufer i ist somit $q_i^M(b_1, b_2)v_i - t_i^M(b_1, b_2)$ wenn er Wertschätzung v_i hat und die Nachrichten b_1 und b_2 gewählt werden.

b) Geben Sie jeweils eine schwach dominante Strategie für Käufer 1 und 2 an.

c) Zeichnen Sie die resultierende Allokationsperformance in ein v_1–v_2–Diagramm ein.

d) Geben Sie einen direkten Mechanismus $\{(q_i, t_i)\}_{i=1}^2$ an, der die gleiche Performance wie der oben beschriebene (indirekte) Mechanismus implementiert.

e) Begründen Sie kurz, ob der direkte Mechanismus aus d) ein VCG–Mechanismus ist oder nicht.