Auktionen und Märkte, WS 11/12 | 2. Klausurtermin
Dr. Frank Rosar | 28. März 2012

Klausur zur Vorlesung Auktionen und Märkte

Erlaubte Hilfsmittel: Keine

Aufgabe 1 (38 Punkte)

Es gelten die Annahmen des SIPV–Modells. Es gibt ein unteilbares Objekt und $n \geq 2$ potentielle Käufer. Die Wertschätzung v_i von Käufer i ist auf dem Intervall $[0, 1]$ gleichverteilt. Die Wertschätzungen sind private Information der Käufer, die Verteilung der Wertschätzungen ist allgemein bekannt.

a) Leiten Sie das symmetrische Gleichgewicht der Erstpreisauktion (ohne Reservationspreis und ohne Eintrittsgeld) her.

b) Betrachten Sie nun eine Erstpreisauktion mit Höchstgebot $\frac{n-1}{n}$. Bieter dürfen also nur Gebote zwischen 0 und $\frac{n-1}{n}$ abgeben. Geben Sie an, wie das symmetrische Gleichgewicht aussieht.

c) Betrachten Sie nun eine Zweitpreisauktion mit Höchstgebot $\frac{n-1}{n}$. Geben Sie an, wie das symmetrische Gleichgewicht aussieht.

d) Vergleichen Sie den erwarteten Erlös aus einer Erstpreisauktion mit Höchstgebot $\frac{n-1}{n}$ mit dem erwarteten Erlös aus einer Zweitpreisauktion mit Höchstgebot $\frac{n-1}{n}$.

   [Hinweis: Der Aufgabenteil kann entweder durch Berechnung oder durch Begründung mit Hilfe eine logischen Arguments und eines Resultats aus der Vorlesung gelöst werden.]

Aufgabe 2 (30 Punkte)

Es gibt ein unteilbares Objekt und zwei potentielle Käufer. Die Wertschätzungen der beiden Käufer für das Objekt sind private Information und unabhängig verteilt. Die Verteilungen sind allgemein bekannt. Wertschätzung v_i ist für $i \in \{1, 2\}$ bzgl. einer Gleichverteilung auf dem Intervall $[0, 1]$ verteilt. Die Wertschätzung des Verkäufers ist $v_0 = 0$.
Betrachten Sie folgenden zweistufigen Mechanismus:

Stufe 1: Der Verkäufer macht ein Angebot an Käufer 2 in Höhe von $\frac{1}{2}$. Nimmt dieser an, erhält er das Objekt zum Preis $\frac{1}{2}$. Lehnt er ab, geht das Spiel mit Stufe 2 weiter.

Stufe 2: Der Verkäufer macht ein Angebot an Käufer 1 in Höhe von $p \in [0, \frac{1}{2}]$. Nimmt dieser an, erhält er das Objekt zum Preis p. Lehnt er ab, behält der Verkäufer das Objekt.

a) Geben Sie das optimale Verhalten von Käufer 1 in Stufe 2 und Käufer 2 in Stufe 1 an. Zeichnen Sie die Allokationsperformance für $p = \frac{1}{4}$ in ein v_1–v_2–Diagramm ein.

Betrachten Sie nun folgenden dreistufigen Mechanismus:

Stufe 0: Der Verkäufer macht ein Angebot an Käufer 1 in Höhe von $\frac{1}{2}$. Nimmt dieser an, erhält er das Objekt zum Preis $\frac{1}{2}$. Lehnt er ab, geht das Spiel mit Stufe 1 weiter.

Stufe 1 und **Stufe 2** sind wie zuvor.

b) Bestimmen Sie das optimale Verhalten von Käufer 1 in Stufe 0 an. Zeichnen Sie die Allokationsperformance für $p = \frac{1}{4}$ in ein v_1–v_2–Diagramm ein.

   [Hinweis: Beachten Sie, dass Käufer 1 in Stufe 0 kein Take–it–or–leave–it–Angebot erhält, da er auch nach Ablehnung noch die Möglichkeit bekommen kann, das Objekt später zu kaufen.]

c) Geben Sie den erwarteten Erlös des Verkäufers in Abhängigkeit von p an. Berechnen Sie, welches p aus $[0, \frac{1}{2}]$ seinen erwarten Erlös maximiert.

Aufgabe 3 (32 Punkte)

(a) Beschreiben Sie, was das Revelationsprinzip besagt.

Es gelten die Annahmen des SIPV–Modells, allerdings *ohne* die Symmetrieannahme. Es gibt ein unteilbares Objekt und zwei potentielle Käufer. Die Wertschätzungen v_1 und v_2 von Käufer 1 und Käufer 2 sind unabhängig voneinander auf dem Intervall $[0, 1]$ verteilt. $\widetilde{v}_1$ ist bzgl. der Verteilungsfunktion $F(v_1) = v_1^2$ verteilt. $\widetilde{v}_2$ ist bzgl. der Verteilungsfunktion $F(v_2) = v_2$ verteilt.

(b) Betrachten Sie den direkten Mechanismus $\{(q_i, t_i)\}_{i=1}^2$ mit der Allokationsregel

$$q_1(\widehat{v}_1, \widehat{v}_2) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \widehat{v}_1 > \widehat{v}_2 \\ 0 & \text{falls } \widehat{v}_1 < \widehat{v}_2 \end{cases} \quad , \quad q_2(\widehat{v}_1, \widehat{v}_2) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \widehat{v}_2 > \widehat{v}_1 \\ 0 & \text{falls } \widehat{v}_2 < \widehat{v}_1 \end{cases}$$

und der Zahlungsregel

$$t_1(\widehat{v}_1, \widehat{v}_2) = \begin{cases} \frac{1}{2}\widehat{v}_1 & \text{falls } \widehat{v}_1 > \widehat{v}_2 \\ 0 & \text{falls } \widehat{v}_1 < \widehat{v}_2 \end{cases} \quad , \quad t_2(\widehat{v}_1, \widehat{v}_2) = \begin{cases} \frac{1}{2}\widehat{v}_2 & \text{falls } \widehat{v}_2 > \widehat{v}_1 \\ 0 & \text{falls } \widehat{v}_2 < \widehat{v}_1 \end{cases} .$$

Überprüfen Sie, ob der direkte Mechanismus für Käufer 1, bzw. für Käufer 2 anreizkompatibel ist.

(c) Der Verkäufer ist risikoneutral und seine Wertschätzung ist $v_0 \in [0, 1]$. Er ist *nicht* gezwungen das Objekt zu verkaufen. Geben Sie die Allokationsperformance des optimalen Mechanismus an, d.h. des Mechanismus, der den erwarteten Nutzen des Verkäufers maximiert.

[Hinweis: Der optimale Mechanismus soll nicht hergeleitet werden! Sie dürfen die Resultate aus der Vorlesung benutzen!]