Mikroökonomik B
4.2 Spiele in extensiver Form, vollständige Information

Dennis L. Gärtner

21. Juni

Übersicht

Annahmen:

- **Dynamisches Spiel:** Spieler treffen Entscheidungen *sequentiell*.
- **Vollständige Information:** Präferenzen der Spieler über Ergebnisse sind *allgemein bekannt*.

Konzepte:

- Extensivform-Repräsentation eines Spiels
- Strategien in Extensivformspielen
- Teilspielperfektes Nash-Gleichgewicht
- Rückwärtsinduktion

Anwendungen/Beispiele:

- Stackelberg Duopol ('Sequentielles Cournot')
- Bank Runs
- Verhandlungsspiele
- Zeitinkonsistene Präferenzen

Literaturangaben

- **Gibbons:** Kapitel 2
- **Osborne (2004):** Kapitel 5–7
- **Mas-Collel et al.:** Kapitel 9
- **Kreps:** Kapitel 12
- **Jehle & Reny (2001):** Kapitel 7.2
- **Varian (2007):** Kapitel 29.

Ein Beispiel: Sequentieller Geschlechterkampf

Sie erinnern sich an den ‘Kampf der Geschlechter’ zwischen Chris und Pat:

		Pat: Fight	Pat: Opera
Chris	Fight	$1, 2$	$0, 0$
	Opera	$0, 0$	$2, 1$

Betrachten wir nun eine <u>sequentielle</u> Variante, in der sich zuerst Chris und dann Pat entscheidet. Konkret:

- $t = 1$: Chris entscheidet, zum Boxkampf (‘fight’) oder in die Oper (‘opera’) zu gehen.
- $t = 2$: Pat beobachtet Chris’ Entscheidung (Chris postet dies per ‘Facebook Places’) und entscheidet danach selbst, zum Kampf oder in die Oper zu gehen.

Dynamische Spiele: Die bevorstehenden Herausforderungen.

Wie können wir dynamische Spiele formalisieren?

Wir werden die **Extensivform** einführen – im Wesentlichen ein 'Spielbaum'.

Was sind Strategien?

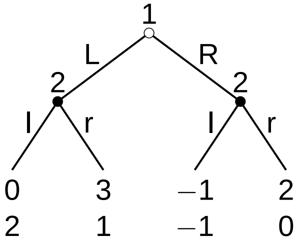
Neue Strategieformen in dynamischen Spielen, da Spieler nun auf vorhergehende Aktionen anderer Spieler **reagieren** können (Strategien werden **spielverlaufsabhängig**).

Gibt es neue Rationalitätskriterien?

Spieler können ihre Entscheidung im Spielverlauf neu überdenken. Dies führt uns zu einer Verfeinerung des Nash-Gleichgewichts, der **Teilspielperfektion**, welche sicherstellt, dass Entscheidungen **sequentiell rational** sind.

Die Extensive Form

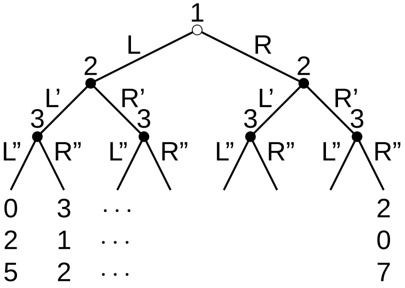
Die **Extensivform** eines Spiels ist im Wesentlichen ein ‘Multi-Personen-Entscheidungsbaum’. Ein Beispiel:

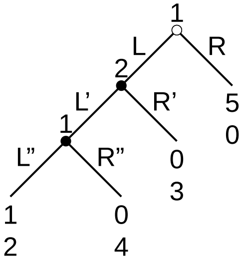


Der Spielbaum repräsentiert die folgenden Ereignisse:

1. Spieler 1 wählt eine Aktion $a_1 \in \{L, R\}$.
2. Spieler 2 beobachtet a_1 und wählt dann eine Aktion $a_2 \in \{l, r\}$
3. Auszahlungen sind $u_1(a_1, a_2)$ und $u_2(a_1, a_2)$ wie in der Grafik dargestellt (oberer Eintrag gehört Spieler 1).

Weitere Beispiele. . .





Elemente:

- **Entscheidungsknoten**: Welcher Spieler die Wahl hat.
- **Äste**: Zur Wahl stehende Aktionen.
- **Anfangsknoten:** Hier beginnt das Spiel. Alle anderen Entscheidungsknoten haben eine bestimmte ‘Geschichte’ (Liste vorhangehender Aktionen im Spielverlauf).
- **Ergebnisknoten:** Hier endet das Spiel & Auszahlungen erfolgen. Beachte: Zu jedem Ergebnisknoten gehört eine eindeutige Geschichte.

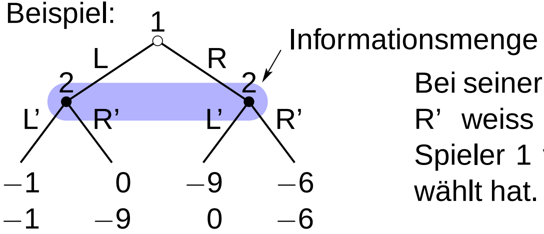
Informationsmengen und imperfekte Information

Soweit alles Spiele mit **perfekter Info:** Jeder Spieler kennt an seinen Entscheidungsknoten die gesamte Geschichte des Spiels (also alle vorhergehenden Aktionen).

Wir benützen **Informationsmengen** um Situationen mit **imperfekter Info** darzustellen.

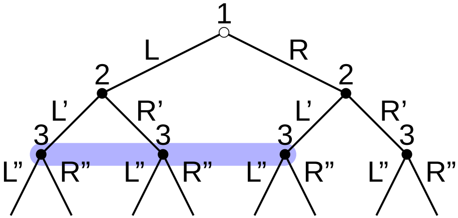
Genauer: **Informationsmenge** $=$ Menge von Entscheidungs-knoten, zwischen welchen ein ziehender Spieler nicht unterscheiden kann.

Beispiel:



Bei seiner Wahl zwischen L' und R' weiss Spieler 2 nicht, ob Spieler 1 vor ihm L oder R gewählt hat.

Ein etwas komplexeres Beispiel...



Spieler 3 weiss bei seinem Zug lediglich, ob vor ihm Spieler 1 R und Spieler 2 R' gewählt haben – oder nicht.

Anmerkung: An beliebigen zwei Entscheidungsknoten in der selben Informationsmenge muss gelten:

- es zieht der selbe Spieler
- der Spieler muss die <u>selben</u> Aktionen zur Verfügung haben (sonst könnte er die Entscheidunsknoten notwendigerweise unterscheiden).

Reminder: Perfekte vs. vollständige Information

- **Perfekte Information (‘vollkommene Information’, ‘Perfect Recall’):** Der entscheidende Spieler kennt jeweils die gesamte Geschichte (vorhergehende Aktionen) des Spiels.

- **Vollständige Information:** Präferenzen jedes Spielers über Ergebnisse des Spiels sind allgemein bekannt.

  Beispiele: Auktionen (selbst wenn ich das Gebot eines anderen Spielers kenne, kenne ich nicht seinen Payoff, weil ich seine Wertschätzung für das Gut nicht kenne).

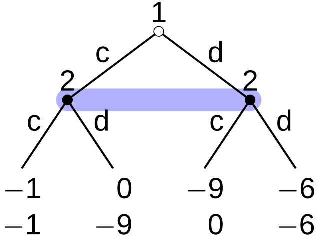
Spiele mit simultanen Zügen können in extensiver Form dargestellt werden

Gefangenendilemma in strategischer Form

P2

		c	d
P1	c	$-1, -1$	$0, -9$
	d	$-9, \;\; 0$	$-6, -6$

Gefangenendilemma in extensiver Form



Strategisch gesehen sind also folgende 2 Spiele äquivalent:

- P1 und P2 entscheiden gleichzeitig
- P2 entscheidet <u>nach</u> P1, aber <u>ohne</u> die Entscheidung von P1 zu kennen.

Definition der Extensiven Form

Informell gesprochen spezifiziert ein Spiel in extensiver Form:

(1) die Spieler im Spiel,

(2a) wann welcher Spieler zieht,

(2b) Liste der Aktionen, welche jedem Spieler bei seinen Zügen zur Auswahl stehen,

(2c) was welcher Spieler bei seinen Zügen *weiss*, sowie

(3) die Auszahlung jedes Spielers für jede Kombination von Aktionen.

Dies lässt sich wie folgt formalisieren:

Definition der extensiven Form

Definition: Spiel in extensiver Form (mit vollst. Info)

Ein **Spiel in extensiver Form** $\Gamma = \{N, A, X, E, \iota, \mathcal{I}, u\}$ besteht aus

- E1 Der **Spielermenge** N.
- E2 **Aktionsmenge** A_i, welche jedem Spieler i (an irgendeinem Punkt des Spiels) zur Verfügung steht (mit $A = \bigcup_{i \in N} A_i$).
- E3 **(Spiel-) Geschichten ('Knoten')** X: Menge endlicher Folgen $h = (a^1, a^2, \ldots, a^k)$ mit $a^s \in A$, $s = 1, \ldots, k$, für die gilt:
  - der **Anfangsknoten** $\emptyset \in X$;
  - wenn $\{a^s\}_{s=1}^{K} \in X$, dann auch $\{a^s\}_{s=1}^{L} \in X$ für $L < K$.
- E4 **Ergebnisgeschichten**: Menge $E = \{h \in X | (h, a) \notin X \text{ für alle } a \in A\}$.
- E5 **Spielerfunktion** $\iota : X \setminus E \mapsto N$ gibt Index des Spielers an, der an Knoten $h \in X$ am Zug ist.
- E6 **Informationsmengen** $\mathcal{I}(h)$: bestehend aus Spielgeschichten $h \in X$, zwischen denen ein Spieler nicht unterscheiden kann.
- E7 **Auszahlungsfunktionen** $u_i : E \mapsto \mathbb{R}$ für jeden Spieler $i \in N$.

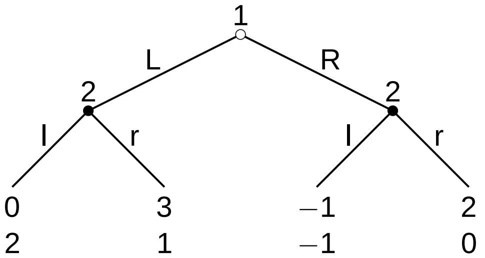
Weitere Notation

- $A_i(h) = \{a \in A_i | \ (h, a) \in X\}$: Menge an Aktionen, welche Spieler i nach Geschichte h zur Verfügung stehen.
- $X_i = \{h \in X \setminus E | \iota(h) = i\}$: Menge an Knoten, an welchen Spieler i am Zug ist.
- $\mathcal{I}_i = \{\mathcal{I}(h) | \iota(h) = i, h \in X\}$: die Spieler i zugeordneten Informationsmengen.

Bemerkung In sef mit perfekter Information sind alle Informationsmengen einelementig, also: $\mathcal{I}(h) = \{h\}, \ \forall h \in X$.

Definition: Ein sef heisst **endlich**, wenn sowohl die Anzahl der Spielstufen als auch die Anzahl der Aktionen auf jeder Spielstufe endlich sind.

Ein Beispiel



- $N = \{1, 2\}$
- $X = \{\emptyset, L, R, (Ll), (Lr), (Rl), (Rr)\}$
- $E = \{(Ll), (Lr), (Rl), (Rr)\}$
- $\iota(\emptyset) = 1$, $\iota(L) = \iota(R) = 2$
- $u_1(Ll) = 0$, $u_2(Ll) = 2$, $u_1(Lr) = 3$, $u_2(Lr) = 1$, $u_1(Rl) = -1, \ldots$

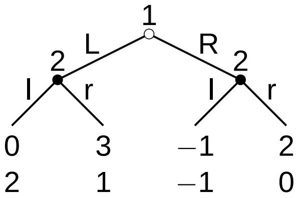
Strategien

Eine erste informelle Definition

Eine **Strategie** in einem Spiel in extensiver Form ist ein vollständiger Aktionsplan: Er spezifiziert für den betreffenden Spieler an jedem Entscheidungsknoten (bzw. in spielen mit imperfekter Info: an jeder Informationsmenge) eine Entscheidung.

Strategien

Beispiel:



Spieler 1: 2 mögliche (reine) Strategien: spiele 'L' oder 'R'.

Spieler 2: **4** mögliche Strategien: Wahl zwischen 'l' oder 'r' an jedem der beiden Entscheidungsknoten.

(Reine) Strategien für Spieler 2:

- $\{L \to l, R \to l\}$: spiele immer 'l'.
- $\{L \to r, R \to r\}$: spiele immer 'r'.
- $\{L \to l, R \to r\}$: spiele 'l' falls P1 'L' gespielt hat, sonst 'r'.
- $\{L \to r, R \to l\}$: spiele 'r' falls P1 'L' gespielt hat, sonst 'l'.

Strategien

Stellen Sie sich eine Strategie als einen **vollständigen Aktionsplan** vor, welchen Sie jemand anderem in die Hand drücken könnten, um das Spiel für Sie zu spielen – egal wie sich das Spiel entwickelt.

Bemerkung: In **statischen** Spielen (bzw. Spielen in strategischer Form) sind Aktionen/Entscheidungen und Strategien dasselbe.

Strategien

Definition: Strategie

Eine reine **Strategie** von Spieler $i \in N$ in einem sef Γ ist eine Funktion $a_i : X_i \mapsto A_i$, die jeder möglichen Spielgeschichte $h \in X_i$ nach der Spieler i am Zug ist (also $\iota(h) = i$), eine Aktion $a_i(h) \in A_i(h)$ zuordnet. Für $h, h' \in X_i$, welche in der selben Informationsmenge liegen, muss gelten: $a_i(h) = a_i(h')$. Wir bezeichnen eine Strategie mit s_i und den Spieler i zur Verfügung stehenden Strategieraum mit S_i.

Im Beispiel oben hätten wir:

- Für Spieler 1: $X_1 = \{\emptyset\}$ und $A_1 = \{\mathrm{L}, \mathrm{R}\}$.
- Für Spieler 1: $X_2 = \{\mathrm{L}, \mathrm{R}\}$, $A_2 = \{\mathrm{l}, \mathrm{r}\}$ und $S_2 = \big\{\{\mathrm{L} \to \mathrm{l}, \mathrm{R} \to \mathrm{l}\}, \{\mathrm{L} \to \mathrm{r}, \mathrm{R} \to \mathrm{r}\}, \{\mathrm{L} \to \mathrm{l}, \mathrm{R} \to \mathrm{r}\}, \{\mathrm{L} \to \mathrm{r}, \mathrm{R} \to \mathrm{l}\}\big\}$

Nash-Gleichgewicht in einem Spiel in Extensiver Form

Jetzt, wo wir definiert haben, was eine Strategie ist in einem sef ist, können wir das Konzept des Nash-Gleichgewichts anwenden:

Nash-Gleichgewicht

Ein Strategienprofil $(s_1^*, \ldots, s_n^*)$ ist ein **Nash-Gleichgewicht** falls

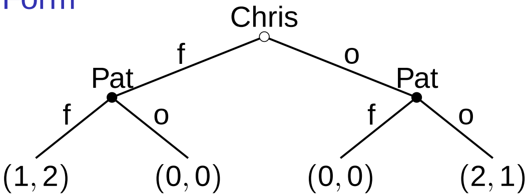
$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geqslant u_i(s_i, s_{-i}^*) \quad \text{für alle } i = 1, \ldots \text{ und alle } s_i \in S_i.$$

Beachte: Dies ist die selbe Definition wie für ssf! Das einzig konzeptionell neue ist die *Strategiedefinition* für sef.

Suchen wir nun die Nash-Gleichgewichte im Granatenspiel. . .

Zurück zum Kampf der Geschlechter

Extensive Form



Strategische Form

Pat

Chris		$\begin{array}{c} f \to f \\ o \to f \end{array}$	$\begin{array}{c} f \to o \\ o \to o \end{array}$	$\begin{array}{c} f \to f \\ o \to o \end{array}$	$\begin{array}{c} f \to o \\ o \to f \end{array}$
	f	1, 2	0, 0	1, 2	0, 0
	o	0, 0	2, 1	2, 1	0, 0

$\Rightarrow$ **3 Nash-Gleichgewichte**

Anmerkung: Reduzierte Strategische Form

Die Tabelle auf der vorhergehenden Folie ist ein Beispiel für die Umwandlung eines sef in eine **reduzierte strategische Form (rsf)**.

Das ‘reduziert’ bezieht sich auf die Entfernung der Zeitdimension. Da eine rsf somit nicht mehr darstellt wer vor oder nach wem zieht (nur noch: wer auf wen reagieren kann), wird i.A. eine rsf mit mehr als einer sef korrespondieren.

Beispiel: Die zwei möglichen Darstellungsarten des Gefangenendilemmas als sef (P1 zieht zuerst bzw. P2 zieht zuerst, wobei der jeweils andere Spieler den Zug nicht beobachten kann) haben jeweils die selbe rsf.

Gemischte Strategien

Wie in statischen Spielen führen Konvexitätsüberlegungen zur Einführung von gemischten Strategien.

Definition: Gemischte Strategien

Eine **gemischte Strategie** σ_i für Spieler i ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über seiner Menge von reinen Strategien S_i.

Eine gemischte Strategie ist also konzeptionell eine Mischung über vollständige, bedingte Pläne: eine reine Strategie wird für das gesamte Spiel zufällig <u>vor dem Spielbeginn</u> gewählt.

Verhaltensstrategien†

Definition: Verhaltensstrategien

Eine **Verhaltensstrategie** $\beta_i(h)$, $h \in X_i$ für Spieler i spezifiziert eine (über Informationsmengen) unabhängige Wahrscheinlichkeitsverteilung über $A_i(h)$ für jede Informationsmenge von Spieler i.

Unterschied zu gemischten Strategien: Verhaltensstrategien geben eine geschichtsabhängige Mischung für jede Geschichte an. D.h.: an jeder Informationsmenge wird eine Aktion zuällig gewählt.

Diese beiden Objekte sind verschieden, aber der Unterschied spielt nur eine Rolle in Spielen mit imperfekter Erinnerung. Allgemeiner Intuition widersprechend sind allerdings gemischte Strategien das generellere Objekt. (Warum?)

Allgemeine Mischungen†

Ein einzelner Spielausgang eines sef korrespondiert i.A. mit mehr als einem Strategienprofil (siehe ‘reduzierte strategischen Form’).

Definition: Ergebnisäquivalenz von Strategieprofilen

Es folge jeder Spieler $i \in N$ den Strategien s_i. Wir bezeichnen die Ergebnisgeschichten mit $o(s) \in E$. Zwei Strategienprofile s und s' heissen **ergebnisäquivalent** wenn $u_i(o(s)) = u_i(o(s'))$ für alle $i \in N$.

Satz (Kuhn 1953)

Für jede gemischte Strategie eines Spielers in einem sef gibt es eine ergebnisäquivalente Verhaltensstrategie.

Nash Gleichgewicht in gemischten Strategien

Definition: Nash-Gleichgewicht (in gemischten Strat.)

Ein **Nash Gleichgewicht** eines sef ist ein Strategienprofil σ^*, sodass für jeden Spieler $i \in N$ und alle $\sigma_i \in \Delta(S_i)$ gilt, dass

$$u_i(o(\sigma^*)) \geq u_i(o(\sigma_i, \sigma^*_{-i})).$$

Teilspielferfektion und unglaubwürdige Drohungen

<u>Ein</u> Nash-GG des Spiels zwischen Chris und Pat ist das folgende:

- Pat geht so oder so zum Boxkampf (egal wo Chris vor ihm hinging);
- Chris geht zum Boxkampf.

Dies ist ein Nash-GG weil die Strategie jedes Spielers optimal ist gegeben die Strategie des anderen.

Allerdings: Etwas beunruhigend ist, dass Pat's Strategy eine *unglaubwürdige Drohung* zu beinhalten scheint:

- *Falls* Chris doch in die Oper gehen *würde* – wäre es für ihn dann wirklich optimal, zum Boxkampf zu gehen?

$\Rightarrow$ Dieser Gedanke führt zu einer Verfeinerung des Nash-Gleichgewichts, um solche unglaubwürdigen Drohungen auszuschliessen.

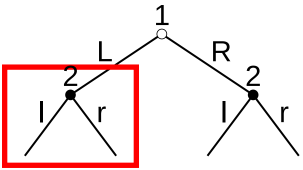
Teilspiele

Ein **Teilspiel** ist der verbleibende Teil eines Spiels ab einem beliebigen Entscheidungsknoten, sodass jeder Spieler *weiss*, dass er in dem betreffenden Teil des Spielbaums ist.

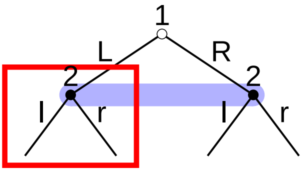
Beachte: Der letzte Zusatz ist nur für Spiele mit imperfekter Info relevant.

Beispiele:

Das ist ein Teilspiel

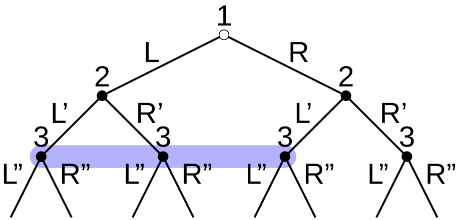


Das ist kein Teilspiel



Teilspiele

Ein weiteres Beispiel: Identifizieren Sie alle Teilspiele des folgenden Spiels



Spieler 3 weiss bei seinem Zug lediglich, ob vor ihm Spieler 1 R und Spieler 2 R' gewählt haben – oder nicht.

Teilspiele

Definition: Teilspiel

Ein **Teilspiel** $\Gamma(h)$ eines sef Γ besteht aus einem einzelnen Knoten h zusammen mit all seinen Folgeknoten in Γ. Ein Teilspiel hat folgende Eigenschaften:

1. es beginnt in einer Singleton-Informationsmenge h,
2. es beinhaltet alle Folgeknoten von h (inkl Blätter),
3. es beinhaltet keine Knoten ausserhalb der Menge von h's Folgeknoten,
4. die zu jedem Knoten h zugehörige Informationsmenge ist komplett im Teilspiel enthalten.

Bemerkung: Mit dieser Definition ist auch das gesamte Spiel ein Teilspiel von sich selbst. Zur Unterscheidung werden alle restlichen Teilspiele manchmal als **'echte'** Teilspiele bezeichnet.

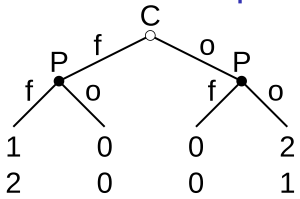
Teilspielperfektes Nash Gleichgewicht

Definition (Selten 1965): Teilspielperfektes Nash-GG

Ein Nash-GG σ^* eines sef Γ heisst **teilspielperfekt** (TSP-Nash-GG), wenn es ein Nash-GG in jedem Teilspiel $\Gamma(h)$ von Γ vorschreibt.

- Da das gesamte Spiel ein Teilspiel von sich selbst ist, sind alle Nash-GG eines Spieles mit nur einem Teilspiel auch TSP-Nash-GG.
- Wenn ein Spiel mehrere Teilspiele besitzt, dann ist die Menge der TSP-Nash-GG eine Teilmenge der Nash-GG dieses Spieles. Deshalb sprechen wir von einem ‘Verfeinerungskonzept.’
- Teilspielperfektion wird manchmal auch als ‘sequentielle Rationalität’ bezeichnet.

Teilspielperfektion im sequentiellen Geschlechterkampf



Für Pat ist f $\to$ *o* bzw. o $\to$ *f* im jeweiligen Teilspiel nicht optimal

$\Rightarrow$ Teilspielperfektion eliminiert 2 der 3 Nash-Gleichgewichte:

NGG 1 C: f
P: $\{$f$\to$f, o$\to$f$\}$

NGG 2 C: o
P: $\{$f$\to$ o, o$\to$o$\}$

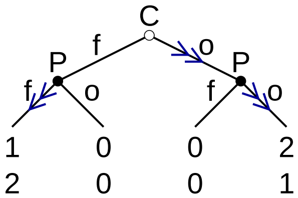
NGG 3 C: o
P: $\{$f$\to$f, o$\to$o$\}$

Rückwärtsinduktion

Eine praktikablere Art der Bestimmung teilspielperfekter Nash-GG ist das ‘Rückwärts-Abarbeiten des Spielbaums’:

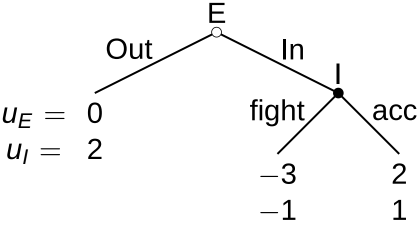
Rückwärtsinduktion (Spiele mit perfekter Info):

1. Bestimmung der optimalen Aktionen in den kleinsten (‘letzten’) Teilspielen.
2. Ersetzen des jeweiligen Entscheidungsknotens mit dem Payoff dieser optimalen Aktion.
3. Wiederhole Schritte 1. und 2. bis der Anfangsknoten erreicht ist.



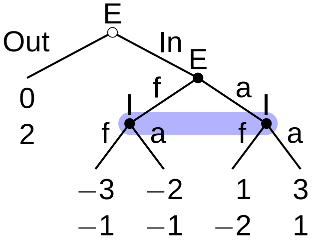
Beispiel: Ein Markteintritts-Spiel

Geschichte: Eine Firma überlegt, in einen monopolisierten Markt einzutreten. Falls sie eintritt, kann der ansässige Monopolist (‘Incumbent I’) den Eindringling entweder bekämpfen (‘fight’) oder nicht (‘accomodate’).



$\Rightarrow$ Im teispielperfekten Nash-GG tritt E ein und I bekämpft nicht (Bekämpfen würde den Eintritt unattraktiv machen – stellt jedoch eine unglaubwürdige Drohung dar).

Erweiterung: Nach dem Eintritt kann auch E (gleichzeitig mit I) ‘fight’ oder ‘accomodate’ wählen.



Das Teilspiel:

I

E	acc	fight
acc	$3, \quad 1$	$1, -2$
fight	$-2, -1$	$-3, -1$

- Das einzige NGG des Teilspiels (beginnend an E’s Entscheidungsknoten) ist (‘acc’/‘acc’).
- Da dieses Gleichgewicht Firma E einen Payoff von 3 bringt, wird sie im ersten Schritt eintreten.

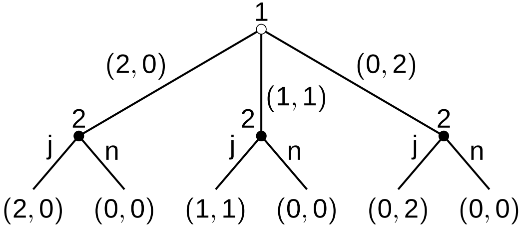
$\Rightarrow$ Im einzigen teilspielperfekten Nash-GG des Spiels tritt Firma E ein und beide Firmen spielen danach ‘accomodate’.

Rückwärtsinduktion: Anmerkungen

- Bei imperfekter Information beinhaltet Rückwärtsinduktion das ‘Rückwärts-Abarbeiten’ des Spiels *beginnend mit den kleinsten Teilspielen*…
- Falls ein Teilspiel <u>mehrere</u> Nash-Gleichgewichte hat, so muss Rückwärtsinduktion ‘mit allen Varianten’ durchgeführt werden.

Ein Beispiel: Schoggistengeli-Verhandlungen

- Zwei Schoggistengeli liegen auf dem Tisch.
- Spieler 1: bietet eine Aufteilung
  Notation: ‘$(2, 0)$’ heisst: 2 Stengeli für P1, 0 Stengeli für P2.
- Spieler 2: kann ‘ja’ oder ‘nein’ sagen – in letzterem Fall bekommt niemand etwas.

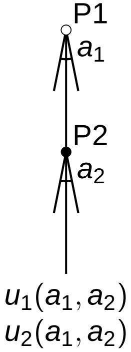


Dieses Spiel hat <u>zwei</u> teilspielperfekte Nash-Gleichgewichte.

Ein Rezept: 2-Stufen-Spiele mit perfekter Information

Eine beliebte Klasse von Anwendungen hat folgende Spielstruktur (Gibbons Section 2.1.A):

1. Spieler 1 wählt eine Aktion $a_1 \in A_1$.
2. Player 2 sieht a_1 und wählt dann $a_2 \in A_2$.
3. Payoffs sind $u_1(a_1, a_2)$ und $u_2(a_1, a_2)$



Rückwärtsinduktion liefert die teilspielperfekten Nash-GG wie folgt:

1. Für bel. a_1, finde P2's beste Antwort

$$\mathcal{B}_2(a_1) \in \text{argmax}_{a_2 \in A_2}\, u_2(a_1, a_2)$$

2. Finde a_1, welches Folgendes löst:

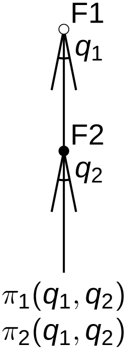
$$a_1 \in \text{argmax}_{a_1 \in A_1}\, u_1(a_1, \mathcal{B}_2(a_1))$$

(sofern $\mathcal{B}_2(a_1)$ eine *Funktion* ist).

Stackelberg Duopol ('Sequentielles Cournot')

Zwei Firmen mit Grenzkosten c, Nachfrage $P(Q) = a - Q$. Firmen setzen ihre Mengen q_i **sequentiell**:

1. Firma 1 ('**Leader**') wählt q_1.
2. Firma 2 ('**Follower**') sieht q_1, wählt dann q_2.



Lösung

- Für beliebige q_1 setzt Firma 2

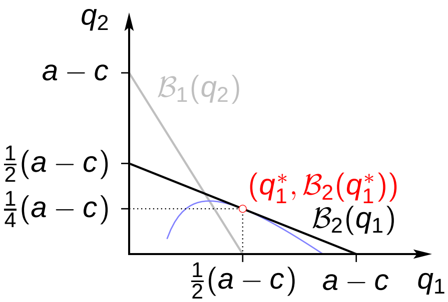
$$q_2 \in \mathcal{B}_2(q_1) = \text{argmax}_{q_2}\, \pi_2(q_1, q_2)$$
$$= \text{argmax}_{q_2} [P(q_1 + q_2) - c] \cdot q_2 = (a - q_1)/2.$$

- Diese Reaktion antizipierend setzt Firma 1

$$q_1 \in \text{argmax}_{q_1}\, \pi_1(q_1, \mathcal{B}_2(q_1))$$
$$= \text{argmax}_{q_1} [P(q_1, \mathcal{B}(q_1)) - c] \cdot q_1 = (a - c)/2.$$

$\Rightarrow$ Gleichgewichtsmengen: $q_1^* = (a - c)/2$, $\mathcal{B}_2(q_1^*) = (a - c)/4$.

Stackelberg Duopol: Graphische Analyse



Firma 1 (‘Leader’) wählt nun ihren **bevorzugten Punkt** auf Firma 2’s bester Antwort $\mathcal{B}_2(q_1)$.

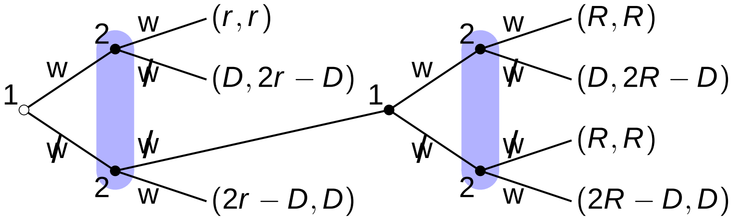
Der Leader fährt besser als unter Cournot, der Follower schlechter (obwohl er ‘mehr weiss’!).

Bank Runs

- 2 Investoren $i = 1, 2$ haben je einen Betrag D ('Depot') bei einer Bank angelegt.
- Die Bank investiert diese Beträge in ein Langzeitprojekt mit Wert $2r \in (D, 2D)$ in Periode $t = 1$ und $2R > 2D$ in $t = 2$.
- Investoren entscheiden sich simultan in $t = 1$, ob sie ihr Depot frühzeitig auflösen ('w' wie 'withdraw') oder nicht ('$\not{w}$'), und nochmals in $t = 2$ falls in $t = 1$ keiner aufgelöst hat.
- Falls in $t = 1$ beide auflösen, erhält jeder die Hälfte des momentanen Werts $2r$; falls nur einer auflöst, erhält dieser sein depot D zurück, der andere den Rest $2r - D$; falls keiner auflöst, geht das Spiel über in Periode $t = 2$.
- Falls in $t = 2$ beide oder keiner auflöst, erhält jeder die Hälfte des momentanen Werts $2R$; falls nur einer auflöst, erhält dieser D, der andere $2R - D$.

Bank Runs

Der Spielbaum



Bank Runs

Das Teilspiel in $t = 2$

		P2	
		w	$\cancel{w}$
P1	w	R, R	$D, \underline{2R - D}$
	$\cancel{w}$	$\underline{2R - D}, D$	$\underline{R}, \underline{R}$

Im eindeutigen Nash-GG löst keiner auf (zur Erinnerung: $R > D$, und somit $2R - D > R$). Aufzulösen wird sogar strikt dominiert.

Bank Runs

Das Spiel in $t = 1$

Wir reduzieren das gesamte Spiel zu einem Spiel mit simultaten Zügen, indem wir den Gleichgewichtsgewinn des Teilspiels an jenem Ast des Spielbaums einsetzen, in welchem in $t = 1$ keiner auflöst:

	w	$\not{w}$
w	$\underline{r}, \underline{r}$	$D, 2r - D$
$\not{w}$	$2r - D, D$	$\underline{R}, \underline{R}$

2 Nash-GG: (w, w) und ($\not{w}$, $\not{w}$) (zur Erinnerung: $D < 2r < 2D$).

$\Rightarrow$ Es gibt ein **Koordinationsproblem** in $t = 1$: Wenn ich denke, dass der andere auflöst, ist es für mich optimal, das selbe zu tun (ein 'Bank Run'). Wenn ich denke, dass der andere nicht auflöst, ist es für mich ebenfalls optimal, nicht aufzulösen.

Dynamische Verhandlungsspiele (‘Bargaining’)

Die Situation

1 Einheit Überschuss soll zwischen zwei Spielern aufgeteilt werden:

- **Verkäufer:** besitzt das Gut, hat Wertschätzung 0.
- **Käufer:** hat Wertschätzung 1 für das Gut.

Wenn Handel zu Preis p stattfindet, so hat Verkäufer Nutzen p, Käufer Nutzen $1 - p$.

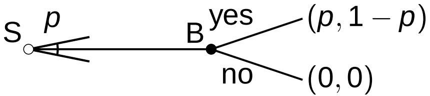
Die Klassische Vorhersage

Preisnehmerschaft & Markträumung: Wir werden auf der ‘Kontraktkurve’ sein, d.h. Handel wird stattfinden zu irgendeinem $p \in [0, 1]$.

$\rightarrow$ **Frage**: Können wir eine genauere Vorhersage treffen, indem wir die Verhandlung als Spiel modellieren?

Modell 1: Das ‘Ultimatum-Spiel’

Seller S macht ein Angebot $p \in [0,1]$, welches Buyer B annehmen oder ablehnen kann.



Nash-GG: Beliebige $\tilde{p} \in [0,1]$ können als Nash-GG gestützt werden, durch Buyer-Strategien der Form $\{$‘yes’ iff $p \leqslant \tilde{p}\}$.

Aber: Teilspielperfekt ist nur $\tilde{p} = 1$. Teilspielperfekte Strategien für B sind:

- $\{$‘yes’ iff $p < 1\}$ $\to$ kein Optimum für Seller.
- $\{$‘yes’ iff $p \leqslant 1\}$ $\to$ Optimum für Seller: $p = 1$.

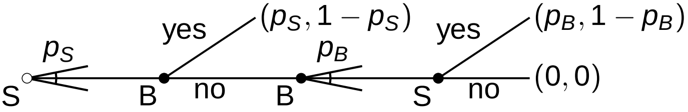
$\to$ Seller wählt höchstes Angebot, das noch akzeptiert wird.

Probleme:

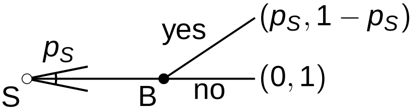
- Entscheidend ist, wer das Angebot macht.
- Endet das Spiel wirklich nach einer Ablehnung?

Modell 2: Alternierende Angebote

Nun kann B nach einer Ablehnung ein Angebot vorschlagen.



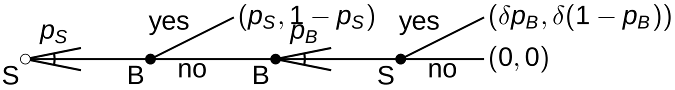
Von oben wissen wir: Gleichgewichtspayoffs im Teilspiel in welchem B vorschlägt sind $(0, 1)$ (B bekommt den gesamten Überschüss). Das Spiel kann also wie folgt reduziert werden:



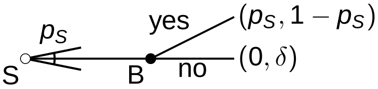
Also: B lehnt jedes Angebot $p_S > 0$ ab, sodass im teilspielperfekten Nash-GG B den gesamten Überschuss bekommt.

Modell 3: Alternierende Angebote mit Wartekosten

Modell wie oben, aber warten **kostet**. Dies kann sein, weil Spieler ungeduldig sind (Diskontfaktor $\delta < 1$) oder weil der Kuchen physisch schrumpft mit Rate δ.



Gleichgewichtspayoffs im Teilspiel sind nun $(0, \delta)$. Das reduzierte Spiel ist:

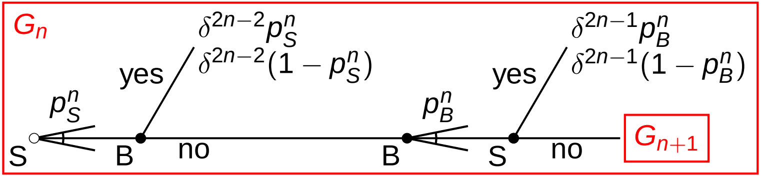


B lehnt nun jedes Angebot $p_S > 1 - \delta$ ab, sodass im Gleichgewicht B einen Anteil δ bekommt (S einen Anteil $1 - \delta$).

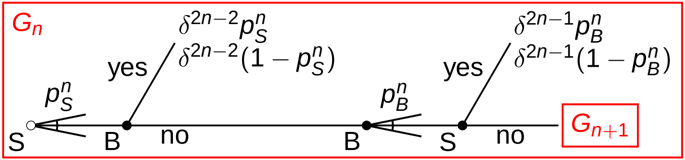
$\Rightarrow$ S kann aufgrund der Wartekosten einen Teil des Überschusses extrahieren.

Model 4: Wiederholte Alternierende Angebote

Wiederholen wir obiges Spiel N Mal. In jeder Stufe $n = 1, 2, \ldots, N$ ohne vorherige Übereinkunft wird folgendes Teilspiel G_n gespielt:



wobei in der letzten Runde ($n = N$) G_{N+1} den Endpayoff $(0, 0)$ repräsentiert.



Bezeichne $u_i(G_n)$ Spieler i's Gleichgewichtspayoff in G_n, dem Teilspiel beginnend in Runde n. Dann:

- GG-Auszahlungen im Teilspiel (des Teilspiels) welches mit Angebot p_B^n beginnt:

  $$S\!: u_S(G_{n+1}), \qquad B\!: \delta^{2n-1} - u_S(G_{n+1}).$$
  $$\Leftrightarrow \left(p_B^n = u_S(G_{n+1})/\delta^{2n-1}\right)$$

- GG-Auszahlungen im Teilspiel der n-ten Runde (beginnend mit Angebot p_S^n):

  $$u_B(G_n) = \delta^{2n-1} - u_S(G_{n+1})$$
  $$u_S(G_n) = \delta^{2n-2} - [\delta^{2n-1} - u_S(G_{n+1})] = (1-\delta)\delta^{2n-2} + u_S(G_{n+1})$$

Verwenden wir $u_S(G_n) = (1-\delta)\delta^{2n-2} + u_S(G_{n+1})$ um vorwärts zu Iterieren, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} u_S(G_1) &= (1-\delta) + u_S(G_2) \\ &= (1-\delta) + (1-\delta)\delta^2 + u_S(G_3) \\ &= \cdots \\ &= (1-\delta)\big[\underbrace{1+\delta^2+\cdots+\delta^{2N-2}}_{=(1-\delta^{2N})/(1-\delta^2)}\big] + \underbrace{u_S(G_{N+1})}_{=0} \\ &= (1-\delta^{2N})/(1+\delta) \end{aligned}$$

Im N-Mal wiederholten Alternierenden-Angebots-Spiel sind Gleichgewichts-Payoffs
Seller: $(1-\delta^{2N})/(1+\delta)$ Buyer: $\delta(1+\delta^{2N})/(1+\delta)$.

Bemerkungen:

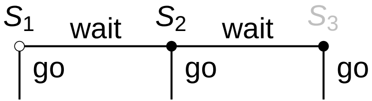
- Im Gleichgewicht findet Handel sofort statt (effizient!).
- Für $N \to \infty$ konvergieren Payoffs gegen $1/(1+\delta)$ für Seller und $\delta/(1+\delta)$ für Buyer.

Spiele gegen das ‘Selbst’: Die Zeitkonsistenz von Präferenzen

Sie können an <u>einem</u> der nächsten 3 Samstage ins Kino gehen.

⇒ Jeden Samstag entscheiden Sie, ob Sie gehen oder warten.

Modellieren wir dies als ein Spiel mit ‘zwei verschiedenen Selbst’, S_1, S_2, von denen jedes entscheidet, ob es am betreffenden Samstag geht oder wartet.



S_1:	$U_1(m_1)$	$U_1(m_2)$	$U_1(m_3)$
S_2:	$U_2(m_1)$	$U_2(m_2)$	$U_2(m_3)$

Die ‘2 Selbst’ S_1, S_2 können verschiedene Präferenzen über Ergebnisse m_1, m_2, m_3 haben (m_t heisst: Sie gehen in Woche t ins Kino).

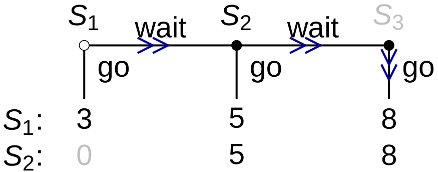
Genauer: Sei $(v_1, v_2, v_3) = (3, 5, 8)$ der (Intra-Wochen-)Nutzen des Films in Woche t.

Fall 1: Zeitkonsistente Präferenzen

Nehmen wir an ein Periode-t-Selbst gewichtet zukünftigen Nutzen wie heutigen,

$$U_t(u_t, u_{t+1}, \ldots) = u_t + u_{t+1} + \cdots,$$

wobei u_t den Intra-Perioden-Nutzen in Periode t bezeichnet.

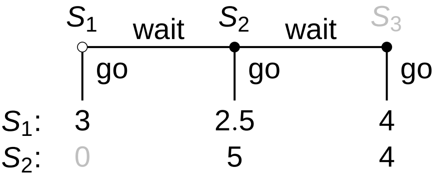


- $\Rightarrow$ Präferenzen sind **zeitkonsistent**: S_1 and S_2 haben selbe Präferenzen über Filme in Woche 2 vs. 3.
- $\Rightarrow$ **Rückwärtsinduktion** liefert gleiches Ergebnis welches S_1 selbst gewählt hätte (warten bis Film 3).

Fall 2: Zeitinkonsistente Präferenzen & Naive Spieler

Nehmen Sie nun an ein Periode-t-Selbst diskontiert zukünftigen Nutzen mit $\beta = 1/2$:

$$U_t = u_t + \tfrac{1}{2}u_{t+1} + \tfrac{1}{2}u_{t+2} + \cdots$$



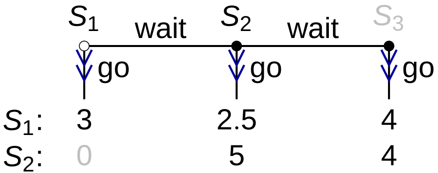
$\Rightarrow$ S_1, S_2 haben **unterschiedliche** Präferenzen darüber, den Film in Woche 2 oder 3 zu sehen!

Annahme (für den Moment): S_1 denkt (fälschlicherweise) S_2 habe die **selben** Präferenzen. Was passiert?

- S_1 wartet auf Film in Woche 3, aber S_2 geht in Woche 2!

Fall 3: Zeitinkonsistente Präferenzen & Clevere Spieler

Nehmen Sie nun an jedes ‘Selbst’ diskontiert zukünftigen Nutzen wie oben, aber Spieler **kennen** ihr Inkonsistenz-Problem. Was wird S_1 tun? Lösen wir das Spiel per Rückwärtsinduktion:



- S_1 geht in Film 1 **obwohl** es selbst lieber Film 3 sehen würde.

Frage: Was wenn S_1 sich auf Film 3 *festlegen* könnte (z.B. indem es schon in Woche 1 ein Ticket für Woche 3 besorgt)?

Eine Anmerkung zur Zeitkonsistenz von Präferenzen

Um obige Probleme der Zeit-Inkonsistenz zu verhindern, wird in der Literatur üblicherweise **exponentielles** (oder: ‘geometrisches’) Diskontieren angenommen:

$$U_t = u_t + \delta u_{t+1} + \delta^2 u_{t+1} + \delta^3 u_{t+2} + \cdots \quad (\delta < 1),$$

welches die nette Eigenschaft hat, dass sich **relative** Bewertungen künftiger Intra-Perioden-Nutzen nicht ändern.

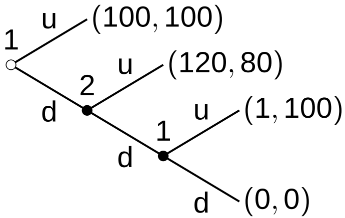
Die Präferenzen im Beispiel oben gehören zur allgemeineren Klasse des **hyperbolischen** Diskontierens, für welche gilt:

$$U_t = u_t + \beta\delta u_{t+1} + \beta\delta^2 u_{t+1} + \beta\delta^3 u_{t+2} + \cdots \quad (\beta, \delta < 1).$$

Anm.: Falls dies Ihr Interesse an Phänomenen geweckt hat, welche zeitinkonsistente Präferenzen hervorrufen können, so schauen Sie zum Beispiel in Rabin (1998, AER), aus welchem dieses Beispiel stammt.

Grenzen der Teilspielperfektion

Betrachten Sie das folgende Spiel:

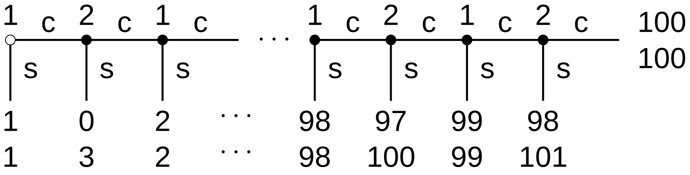


Gleichgewichts-Prognose aus Rückwärtsinduktion liefert $(100, 100)$-Ergebnis.
Aber: Sind wir da wirklich so sicher?

Falls Spiel zu Knoten kommt, in welchem P2 zieht – *wie* kann P2 dann P1 noch für rational halten (und annehmen, dass letzterer ‘u’ wählt)?

Teilspielperfektion stellt sich Abweichungen als ‘puren Unfall’ vor, welcher die Rationalitäts-Hypothese nicht tangiert $\rightarrow$ ‘Temporary Insanity’.

Das Hundertfüssler-Spiel (Rosenthal, 1981, JET)



Was ist das teilspielperfekte Nash-Gleichgewicht?

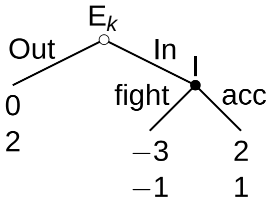
Beachte: Bei jedem Zug präferiert ein Spieler

- stoppen (‘s’) falls der andere Spieler unmittelbar danach stoppt, aber
- fortfahren (‘continue’ – ‘c’) falls der andere Spieler danach fortfährt

(egal was danach passiert).

Das ‘Chainstore Paradox’

Geschichte: Eine Firma I (‘Incumbent’) ist Monopolist auf K unabhängigen Märkten $k = 1, \ldots, K$. Nacheinander sieht sie sich auf jedem Markt einem potentiellen Eindringling E_k (‘Entrant’) gegenüber, gegen welchen sie folgendes Spiel spielt (vergangene Aktionen können von allen beobachtet werden):



Was ist das teilspielperfekte Nash-Gleichgewicht?

Frage: Nehmen Sie an Sie sind potentieller Eindringling #11, und Sie haben beobachtet wie Firma I jeden der 10 letzten Eindringlinge bekämpft hat. Wie sollten Sie sich verhalten?